



**HAL**  
open science

# Une formulation bidimensionnelle pour l'homogénéisation en flexion de structures hélicoïdales

F Treyssède, Patrice Cartraud

► **To cite this version:**

F Treyssède, Patrice Cartraud. Une formulation bidimensionnelle pour l'homogénéisation en flexion de structures hélicoïdales. 25ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2022, Nantes, France. hal-04313179

**HAL Id: hal-04313179**

**<https://univ-eiffel.hal.science/hal-04313179>**

Submitted on 29 Nov 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une formulation bidimensionnelle pour l'homogénéisation en flexion de structures hélicoïdales

F. TREYSSÈDE<sup>a</sup>, P. CARTRAUD<sup>b</sup>

a. GERS-GeoEND, Univ Gustave Eiffel, F-44344 Bouguenais, France, fabien.treysede@univ-eiffel.fr

b. GeM, UMR CNRS 6183, Centrale Nantes, F-44321 Nantes, France, patrice.cartraud@ec-nantes.fr

## Résumé :

*Nous proposons une formulation bidimensionnelle pour modéliser le comportement mécanique en flexion de structures hélicoïdales. Parmi ces structures, on peut citer en particulier les câbles multifilaires. Une représentation précise de la réponse en flexion de ces structures nécessite généralement des modèles d'éléments finis tridimensionnels de grande taille. La formulation proposée, écrite uniquement sur la section, permet une réduction drastique du coût de calcul. Pour y aboutir, nous exploitons plusieurs techniques : théorie de l'homogénéisation, méthode des développements asymptotiques, système de coordonnées curviligne hélicoïdal et séparation de variables de nature complexe.*

## Abstract :

*A two-dimensional formulation is proposed for modeling the mechanical behavior of helical beam-like structures subjected to bending loads. Helical structures include multi-wire cables, which are widely used in engineering applications. An accurate representation of their mechanical behavior typically requires large-size three-dimensional finite element models. The proposed formulation, written on the cross-section only, offers a tremendous reduction of computational cost. Such a formulation is achieved by exploiting several techniques : homogenization theory, asymptotic expansion method, helical curvilinear coordinate system, and separate variable solutions of complex type.*

**Mots clés : homogénéisation ; poutre ; hélicoïdal ; élément fini ; câble ; flexion**

## 1 Introduction

Les structures à géométrie hélicoïdale sont présentes dans de nombreuses applications d'ingénierie. Un exemple typique est celui des câbles multifilaires, omniprésents dans le domaine du génie civil. Les câbles sont généralement constitués de fils enroulés en hélice et ont la capacité de supporter de fortes charges axiales avec une rigidité en flexion relativement faible. La prédiction de leur comportement en flexion est essentielle pour évaluer leur durée de vie.

Dans ce papier, nous restreignons notre attention aux torons, composés d'une couche de fils hélicoïdaux enroulés avec la même torsion autour d'un axe droit (par exemple, les torons à sept fils).

Le comportement en flexion des torons peut être décrit par des modèles simplifiés reposant sur la théorie des poutres (voir par exemple [1, 2, 3, 4]). Les limitations inhérentes aux hypothèses de poutre, telles que l'aplatissement du fil et la concentration des contraintes due au contact, restreignent cependant le champ d'application de ces modèles simplifiés. Pour lever ces limitations, des modèles EF (éléments finis) tridimensionnels ont été proposés. Afin d'obtenir une bonne représentation du comportement mécanique et, en particulier, de minimiser les effets de bord aux frontières, la longueur du modèle EF doit être suffisamment grande, ce qui conduit à des systèmes de grande taille et coûteux en calcul (voir par exemple [5, 6, 7, 8]).

Une réduction considérable peut être obtenue en exploitant la propriété de symétrie hélicoïdale continue de la géométrie afin de réduire le domaine de calcul à un modèle bidimensionnel écrit sur la section transverse uniquement. Ce type de réduction a été proposé dans [9, 10], mais limité à des chargements en extension ou torsion, excluant donc la flexion. Les travaux exposés dans ce résumé étendu font suite à l'article [9], en étendant notre formulation bidimensionnelle à des chargement en flexion. Nous résumons ici les étapes et résultats principaux de notre approche, que nous avons publiés durant la crise sanitaire dans un papier récent [11] mais que nous n'avons pas encore eu l'occasion de présenter lors d'une manifestation scientifique.

Notre approche exploite le cadre mathématique de la théorie de l'homogénéisation, basée sur la méthode des développements asymptotiques [12, 13]. Ce type d'approche donne l'approximation au premier ordre du problème d'élasticité tridimensionnel à partir de la solution de deux problèmes successifs : un problème tridimensionnel microscopique et un problème unidimensionnel macroscopique. Ce dernier correspond aux équations d'équilibre d'une poutre de Navier-Bernoulli-Saint Venant, dont les propriétés élastiques effectives sont obtenues à partir de la solution du problème microscopique. Comme nous le montrons ici, le problème microscopique peut être réduit à la section transverse et résolu par une analyse EF bidimensionnelle. Cette réduction nécessite de formuler la théorie de l'homogénéisation dans un repère hélicoïdal. Dans ce système de coordonnées curvilignes, les chargements en flexion dépendent néanmoins de la coordonnée axiale. Pour contourner cette difficulté, nous proposons un traitement spécifique exploitant une séparation de variables de nature complexe.

## 2 Homogénéisation de poutres pour structures hélicoïdales

### 2.1 Variables macroscopiques et microscopiques

Le point de départ consiste à écrire les deux changements de variables successifs :

$$(X_1, X_2, X_3) \longmapsto (X_3, Y_1, Y_2, Y_3) \longmapsto (X_3, y_1, y_2, y_3) \quad (1)$$

où  $X_i$  and  $Y_i = X_i/\varepsilon$  ( $i = 1, 2, 3$ ) désignent les variables macroscopiques et microscopiques en coordonnées cartésiennes (coordonnées "droites"), et  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) désigne la variable microscopique dans le repère hélicoïdal :

$$\begin{cases} Y_1 = y_1 \cos \tau y_3 - y_2 \sin \tau y_3 \\ Y_2 = y_1 \sin \tau y_3 + y_2 \cos \tau y_3 \\ Y_3 = y_3 \end{cases} \quad (2)$$

où  $\tau = 2\pi/L_3$  est la torsion du système de coordonnées hélicoïdales et  $L_3$  désigne le pas d'hélice de la structure.

Une remarque importante est que nous conservons la coordonnée droite  $X_3$  pour l'échelle lente car le comportement effectif visé est celui d'une poutre droite. Ainsi, le changement de variable final donné par l'Équation (1) combine des coordonnées hélicoïdales (pour l'échelle rapide) avec une coordonnée droite (pour l'échelle lente).

## 2.2 Développement asymptotique

La solution en déplacement est maintenant recherchée sous la forme du développement asymptotique suivant :

$$\mathbf{u}(X_3, \mathbf{y}) = \mathbf{u}^0(X_3, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{u}^1(X_3, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2(X_3, \mathbf{y}) + \dots \quad (3)$$

où le déplacement à l'ordre  $k$ ,  $\mathbf{u}^k(X_3, \mathbf{y})$ , est périodique en  $y_3$  selon une période égale à  $L_3$ .

Désignons par  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$  les vecteurs unitaires du repère cartésien. À partir du problème d'élasticité tridimensionnelle, il est connu que le déplacement à l'ordre 0 correspond à une déformation en flexion (déplacement macroscopique transverse) [14] :

$$\mathbf{u}^0(X_3, \mathbf{Y}) = U_\alpha^0(X_3) \mathbf{E}_\alpha \quad (4)$$

et que le déplacement à l'ordre 1 est de la forme :

$$\mathbf{u}^1(X_3, \mathbf{Y}) = -Y_\alpha \frac{\partial U_\alpha^0(X_3)}{\partial X_3} \mathbf{E}_3 + U_3^1(X_3) \mathbf{E}_3 + \Phi^1(X_3) (Y_1 \mathbf{E}_2 - Y_2 \mathbf{E}_1) \quad (\alpha = 1, 2) \quad (5)$$

Le déplacement à l'ordre 1 implique un terme de flexion ainsi qu'un déplacement de corps rigide, composition d'une translation  $U_3^1$  et d'une rotation  $\Phi^1$  autour de l'axe  $\mathbf{E}_3$ .

## 2.3 Solution du problème microscopique

En réécrivant le problème d'élasticité tridimensionnel dans le système de coordonnées hélicoïdales [11], le déplacement à l'ordre 2 peut être déterminé en résolvant numériquement la formulation variationnelle faible suivante :

$$\int_{V_y} (\mathbf{L}_y \delta \mathbf{u})^T \mathbf{C} \mathbf{L}_y \mathbf{u}^2 dV_y = - \int_{V_y} (\mathbf{L}_y \delta \mathbf{u})^T \mathbf{C} \mathbf{L}_{X_3} \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial X_3} dV_y \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (6)$$

with  $dV_y = dy_1 dy_2 dy_3$  and :

$$\mathbf{L}_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y_2} & 0 \\ 0 & 0 & \tau y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} - \tau y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial y_3} \\ \tau y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} - \tau y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial y_3} & \frac{\partial}{\partial y_1} & 0 \\ \tau & -\tau & \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \tau y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} - \tau y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial y_3} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_2} \end{bmatrix}, \mathbf{L}_{X_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Le membre de droite de (6) peut être vu comme un effort extérieur représentant l'action des déformations macroscopiques imposées, qui apparaissent dans le vecteur  $\frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial X_3}$ . Ce vecteur est exprimé dans le repère

hélicoïdal comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial X_3} = \left\{ \begin{array}{c} -y_2 E^T \\ y_1 E^T \\ E^E + (y_2 \cos \tau y_3 + y_1 \sin \tau y_3) E^{C_1} + (y_2 \sin \tau y_3 - y_1 \cos \tau y_3) E^{C_2} \end{array} \right\} \quad (8)$$

Les déformations macroscopiques sont définies par :

$$E^E = \frac{\partial U_3^1}{\partial X_3}, \quad E^T = \frac{\partial \Phi^1}{\partial X_3}, \quad E^{C_1} = -\frac{\partial^2 U_2^0}{\partial X_3^2}, \quad E^{C_2} = \frac{\partial^2 U_1^0}{\partial X_3^2} \quad (9)$$

$E^E$  représente l'extension macroscopique,  $E^T$  est la torsion macroscopique,  $E^{C_1}$  est la courbure macroscopique autour de l'axe  $X_1$  et  $E^{C_2}$  est la courbure macroscopique autour de  $X_2$ .

Dans l'Équation (8), on peut distinguer deux types de termes : ceux indépendants de  $y_3$ , liés à  $E^{E,T}$ , et ceux dépendants de  $y_3$ , liés à  $E^{C_\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2$ ). Leur traitement est différent. Les premiers conduisent à un problème totalement indépendant de  $y_3$ , en extension et torsion, qui peut être facilement réduit à la section. Nous avons traité ce problème dans [9]. Les derniers, impliqués dans la dernière composante de  $\frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial X_3}$ , sont liés à la flexion. A première vue, la dépendance en  $y_3$  de l'Équation (8) empêche une réduction du problème en flexion sur la section  $(y_1, y_2)$ .

L'astuce que nous proposons consiste à profiter de la séparation de variables autorisée par le système hélicoïdal [15] pour construire des solutions ayant une dépendance analytique en  $y_3$  en  $\cos \tau y_3$  et  $\sin \tau y_3$ . Afin d'obtenir une forme plus compacte, les solutions sont recherchées sous forme d'exponentielle complexe  $e^{i\tau y_3}$ . Ce type de dépendance est standard dans les problèmes de propagation d'ondes [15]. Elle peut se justifier ici en élastostatique par la nature hélicoïdale de la géométrie, qui induit une forme d'anisotropie dans les équations d'équilibre. L'anisotropie empêche le découplage entre les composantes  $\sin(\cdot)$  et  $\cos(\cdot)$  des champs (un tel découplage est généralement applicable uniquement dans des cas totalement isotropes).

La dernière composante de l'Équation (8) peut être réécrite comme :

$$(y_2 \cos \tau y_3 + y_1 \sin \tau y_3) E^{C_1} + (y_2 \sin \tau y_3 - y_1 \cos \tau y_3) E^{C_2} = \text{Re} \left\{ (y_2 - iy_1) (E^{C_1} - iE^{C_2}) e^{i\tau y_3} \right\} \quad (10)$$

ce qui montre que, dans l'espace complexe,  $\partial \mathbf{u}^1 / \partial X_3$  obéit à une séparation de la variable  $y_3$  en  $e^{i\tau y_3}$ . Cette séparation s'applique également à  $\mathbf{u}^2$ . De plus, afin de réduire le problème à la section, un choix commode pour le champ test  $\delta \mathbf{u}$  est d'adopter une dépendance en  $e^{-i\tau y_3}$ . Nous avons ainsi :

$$\mathbf{u}^1(y_1, y_2, y_3) = \mathbf{u}^1(y_1, y_2) e^{i\tau y_3}, \quad \mathbf{u}^2(y_1, y_2, y_3) = \mathbf{u}^2(y_1, y_2) e^{i\tau y_3}, \quad \delta \mathbf{u}(y_1, y_2, y_3) = \delta \mathbf{u}(y_1, y_2) e^{-i\tau y_3} \quad (11)$$

En appliquant la séparation de variables ci-dessus à la forme faible (6), le problème est finalement réduit à la section  $(y_1, y_2)$  et résolu par une discrétisation standard par éléments finis à deux dimensions seulement. La solution du déplacement à l'ordre 2 peut alors être obtenue en prenant la partie réelle de la solution complexe, *i.e.*  $\text{Re}(\mathbf{u}^2 e^{i\tau y_3})$ .

## 2.4 Détermination de la rigidité macroscopique

Suivant l'article [5], les composantes de la matrice de rigidité effective,  $[K^{\text{hom}}]$ , peuvent être post-traitées à partir de l'énergie de déformation totale par unité de longueur :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} E^E \\ E^T \\ E^{C_1} \\ E^{C_2} \end{Bmatrix}^T [K^{\text{hom}}] \begin{Bmatrix} E^E \\ E^T \\ E^{C_1} \\ E^{C_2} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

où  $[K^{\text{hom}}]$  est défini à partir de la loi constitutive homogénéisée reliant force, moments et déformations macroscopiques :

$$\begin{Bmatrix} N^1 \\ M_3^1 \\ M_1^1 \\ M_2^1 \end{Bmatrix} = [K^{\text{hom}}] \begin{Bmatrix} E^E \\ E^T \\ E^{C_1} \\ E^{C_2} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

## 3 Résultats pour des torons à sept brins

Au préalable, le modèle que nous proposons a été comparé à des solutions analytiques et validé pour des cylindres et ressorts (résultats non présentés ici). Cette section se concentre sur les résultats obtenus pour des torons à sept fils.

Tout d'abord, précisons que les torons présentent généralement un jeu entre les fils périphériques : leur diamètre est généralement plus petit que celui du fil central de sorte qu'ils ne se touchent pas. Il s'agit d'un critère de conception répandu destiné à minimiser les effets de frottement et les contraintes locales de traction. Nous fixons  $r_h = 0.967r_c$ , où  $r_c$  et  $r_h$  désignent les rayons des fils central et périphériques respectivement. Le coefficient de Poisson est fixé à  $\nu = 0.28$ ,  $E$  désigne le module d'Young. Les résultats sont présentés pour un angle d'hélice variable, défini par  $\phi = \tan^{-1} \tau(r_h + r_c)$ .

En ce qui concerne l'interaction entre le fil central et les fils périphériques, deux comportements limites sont considérés [2] : le comportement glissant (pas de frottement) et le comportement collant (pas de glissement).

Dans le cas du comportement glissant, les fils peuvent librement glisser les uns par rapport aux autres. Cette configuration se produit lorsque la courbure en flexion est suffisamment élevée pour négliger le frottement entre les fils. Le toron peut être traité comme un assemblage de fils indépendants. Comme le montre la Figure 1a, la solution numérique pour la rigidité homogénéisée  $K_{33}^{\text{hom}}$  est en très bon accord avec la solution analytique de [2]. La Figure 1b montre la partie réelle du champ de contrainte axiale normalisée,  $\sigma_{33}^1/E$ , calculée pour  $r_c = 1$ ,  $\phi = 7.9^\circ$  et  $E^{C_1} = 1$ , ainsi que le maillage EF utilisé pour le calcul (12369 degrés de liberté). Comme prévu, chaque fil se comporte de façon indépendante (la contrainte axiale varie linéairement à l'intérieur de chaque fil), avec une flexion qui lui est propre.

Dans le cas du comportement collant, l'ensemble du câble se comporte comme un solide unique : les fils périphériques sont entièrement collés au fil central. Une telle configuration se produit généralement au début de la flexion du câble, lorsque les forces de contact radiales sont suffisamment élevées pour empêcher le glissement. La Figure 2a montre la rigidité homogénéisée  $K_{33}^{\text{hom}}$  calculée avec le modèle numérique ainsi que selon l'approximation analytique proposée dans [2]. La Figure 2b donne la partie

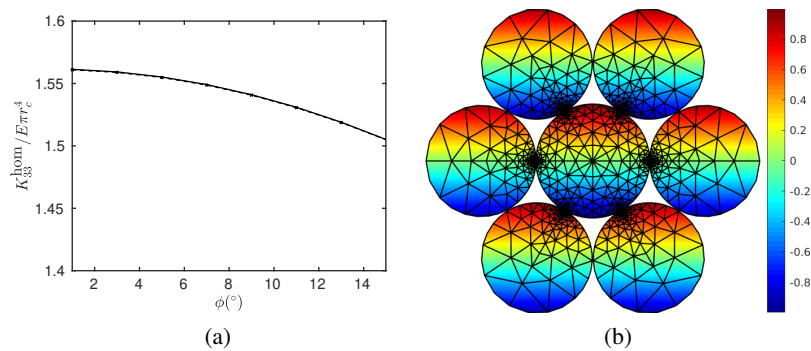


FIGURE 1: Comportement glissant. (a) Rigidité en flexion homogénéisée en fonction de l'angle d'hélice calculée par la formulation EF bidimensionnelle (trait pointillé  $\times$ ) et la solution analytique (trait plein). (b) Champ de contrainte normalisé  $\sigma_{33}^1/E$  calculé pour  $r_c = 1$ ,  $\phi = 7.9^\circ$  et  $E^{C1} = 1$  (partie réelle).

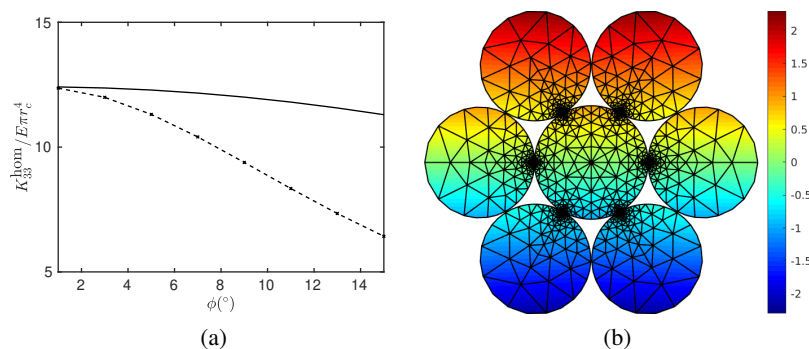


FIGURE 2: Comportement collant. (a) Rigidité à la flexion homogénéisée en fonction de l'angle d'hélice calculée par la formulation EF bidimensionnelle (trait pointillé  $\times$ ) et l'approximation analytique (trait plein). (b) Champ de contrainte normalisé  $\sigma_{33}^1/E$  calculé pour  $r_c = 1$ ,  $\phi = 7.9^\circ$  et  $E^{C1} = 1$  (partie réelle).

réelle de  $\sigma_{33}^1/E$  calculée avec les mêmes paramètres que précédemment. Contrairement au comportement glissant, le mouvement de flexion du toron est bien de type global (la contrainte varie continûment dans toute la section).

Comme on peut l'observer sur la Figure 2a, la différence entre la solution numérique et l'approximation analytique augmente significativement avec l'angle. En fait, la solution analytique [2] repose sur une approximation forte de type section plane. Pour bien mettre en évidence l'influence d'une telle approximation, la Figure 3 montre les résultats numériques obtenus en reliant artificiellement les fils périphériques à leurs noeuds voisins les plus proches (cas du contact latéral) : la solution numérique est alors en bon accord avec l'approximation analytique pour toute valeur de  $\phi$ .

La différence entre les Figures 3a et 2a s'explique par le mouvement de rotation des fils périphériques hélicoïdaux, bloqués lorsqu'ils sont connectés mais libres lorsqu'ils ne sont pas connectés entre eux. Dans le premier cas (artificiel), l'ensemble de la section se comporte comme un corps solide unique, conformément à l'approximation de poutre de [2]. Dans le second cas (cohérent avec le critère de conception évoqué précédemment), l'hypothèse de section plane n'est pas valide. L'approximation de section plane conduit donc à une surestimation significative de la rigidité en flexion réelle des brins en comportement collant (et donc de la courbure critique à partir de laquelle les fils peuvent commencer à glisser les uns par rapport aux autres).

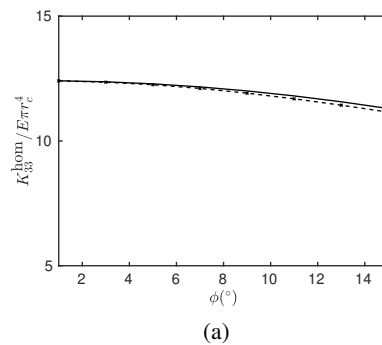


FIGURE 3: Comportement collant avec contact artificiel entre les fils périphériques. Rigidité à la flexion homogénéisée en fonction de l'angle calculée par la formulation EF bidimensionnelle (trait pointillé  $\times$ ) et l'approximation analytique (trait plein).

En raison de son faible coût de calcul, la formulation bidimensionnelle proposée permet un examen approfondi des effets du contact mécanique sur les propriétés homogénéisées des torons à sept fils. Des résultats tenant compte de l'augmentation de la surface de contact sous une extension appliquée seront présentés lors de la conférence. Pour davantage de détails, on pourra aussi consulter [11].

## Références

- [1] A. Cardou, C. Jolicoeur, Mechanical models of helical strands, *Applied Mechanics Reviews* 50 (1997) 1–14.
- [2] K. Papailiou, On the bending stiffness of transmission line conductors, *IEEE Transactions on Power Delivery* 12 (1997) 1576–1588.
- [3] A. Nawrocki, M. Labrosse, A finite element model for simple straight wire rope strands, *Computers and Structures* 77 (2000) 345–359.
- [4] S. Lalonde, R. Guilbault, F. Légeron, Modeling multilayered wire strands, a strategy based on 3d finite element beam-to-beam contacts - part i : Model formulation and validation, *International Journal of Mechanical Sciences* 126 (2017) 281–296.
- [5] P. Cartraud, T. Messenger, Computational homogenization of periodic beam-like structures, *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006) 686–696.
- [6] C. Erdonmez, C. E. Imrak, A finite element model for independent wire rope core with double helical geometry subjected to axial loads, *Sadhana* 36 (2011) 995–1008.
- [7] E. Stanova, G. Fedorko, M. Fabian, S. Kmet, Computer modelling of wire strands and ropes part ii : Finite element-based applications, *Advances in Engineering Software* 42 (2011) 322–331.
- [8] D. Zhang, M. Ostojca-Starzewski, Finite element solutions to the bending stiffness of a single-layered helically wound cable with internal friction, *Journal of Applied Mechanics* 83 (2016) 031003–1,031003–8.
- [9] A. Frikha, P. Cartraud, F. Treyssède, Mechanical modeling of helical structures accounting for translational invariance. part 1 : Static behavior, *International Journal of Solids and Structures* 50 (2013) 1373–1382.
- [10] N. Karathanasopoulos, G. Kress, Two dimensional modeling of helical structures, an application to simple strands, *Computers and Structures* 174 (2016) 79–84.



- 
- [11] F. Treyssède, P. Cartraud, A two-dimensional formulation for the homogenization of helical beam-like structures under bending loads, *International Journal of Solids and Structures* 234-235 (2021) 111270.
- [12] N. Buannic, P. Cartraud, Higher-order effective modelling of periodic heterogeneous beams - Part 1 : Asymptotic expansion method, *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001) 7139–7161.
- [13] J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia, *Introduction aux méthodes asymptotiques et l’homogénéisation*, Masson, Paris, 1992.
- [14] L. Trabucho, J. M. Viaño, Mathematical modelling of rods, *Handbook of Numerical Analysis IV*, P.G. Ciarlet, J.L. Lions editors, North-Holland (1996) 487–974.
- [15] F. Treyssède, Mode propagation in curved waveguides and scattering by inhomogeneities : application to the elastodynamics of helical structures, *Journal of the Acoustical Society of America* 129 (2011) 1857–1868.